目　次

第１編　機械力学…………………………… 1

第１章　質点系の力学……………………………………… 1
第２章　剛体の力学………………………………………… 9
第３章　振　動………………………………………………16
第４章　機　構………………………………………………26
第５章　制　御………………………………………………38

第２編　設計・工作…………………………45

第１章　機械材料……………………………………………45
第２章　機械設計……………………………………………57
第３章　機械工作……………………………………………71
第４章　機械製図……………………………………………97

第１編　機械力学

第１章　質点系の力学

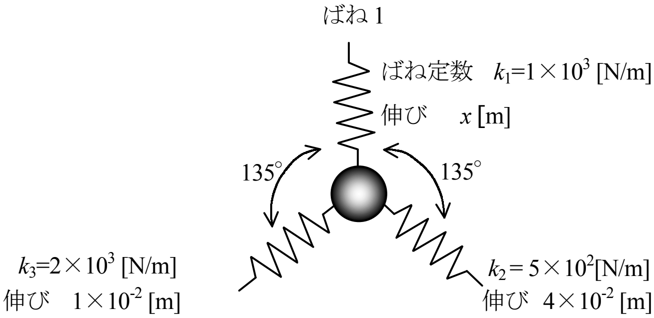
第１節　質点系の力のつりあい

質点に対し，力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ が外部から作用するとき，質点が静止するための条件は，力のベクトル和が 0，すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

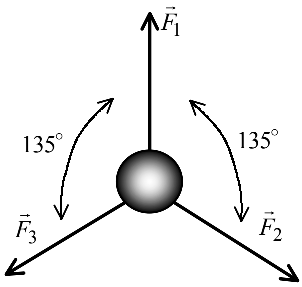
となることである。このとき，$\vec{F}_i$ は外部から作用する力（外力）であって，応力など内部のみで作用する力（内力）は考えなくてよい。

［例題　１］　下図のように質点に水平面内で 3 方向からばねで力を加えて静止させた。ばね定数およびばねの自然長からののびは図に示したとおりである。このときばね 1 の伸びを求めよ。



［解答　１］

質点にかかる力を図示すると下図のようになる。



ここで F_2=5×10^2×4×10^{-2} =20[N]

F_3=2×10^3×1×10^{-2}=20 [N]

質点は静止しているので

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

$\therefore F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} F_3 = 20\sqrt{2} = 28.3$ [N]

したがって，ばね 1 の伸び x は

$x \times 1 \times 10^3 = 28.3 \quad \therefore x = 2.83 \times 10^{-2}$ [m]

正　解　2.83×10^{-2} [m]

第２節　質点の運動方程式

質点に働く外力の合力が $\vec{F}$ であるとき，質点は加速度 $\vec{a}$ をもつ。このとき $\vec{F}$ と $\vec{a}$ の関係は質点の質量 m を用いて以下のように表すことができる。

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

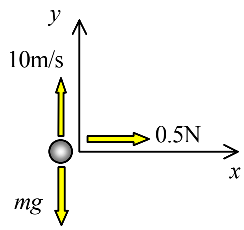
この式を質点の運動方程式という。

質点に加速度 $\vec{a}(t)$ が作用しているとき，質点の時刻 t での速度と位置は下式のように表される。

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(\tau) d\tau \qquad (\vec{v}_0 \text{ は初期速度})$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau \qquad (\vec{x}_0 \text{ は初期位置})$$

［例題　２］　電荷を持った質点が位置(0,0)にある。質点に対し重力は$-y$ 方向，電磁力は$+x$ 方向に働く。質点の質量を 0.1 [kg]，電磁力 0.5 [N]，初期速度を $+y$ 方向に 10 [m/s] とするとき，3 秒後の位置と速度を求めよ。ただし，重力加速度を g=9.8 [m/s^2]とする。



［解答　２］

x 方向の運動方程式は

$0.5 = 0.1 \times a_x \quad \therefore a_x = 5$ [m/s^2]　　（a_x は x 方向の加速度）

したがって，位置と速度は

$v_x(t)$=5t,　　$x(t)$=$\dfrac{5}{2}t^2$

y 方向の運動方程式は

$-0.1\times9.8=0.1\times a_y$　$\therefore\ a_y=-9.8$[m/s^2]

したがって，位置と速度は

$v_y(t)$=10－9.8t，$y(t)$=10t－4.9t^2

それぞれに $t=3$ を代入すると

$\vec{v}=(15,-19.4)$ [m/s]　　(x,y)=(22.5,－14.1) [m]

正　解　位置　(22.5,－14.1) [m]
　　　　速度　(15,－19.4) [m/s]

［例題　３］ 直線上を運動する質量2[kg]の質点がある。質点に働く力は時刻tを用いて$F=10-2t$ [N]と表される。時刻 0 において，質点の位置，速度ともに 0 であった。この質点の 5 秒後の位置を求めよ。

［解答　３］

この質点の運動方程式は

$10-2t=2a$　　$\therefore\ a(t)=5-t$ [m/s^2]

速度 $v(t)$ は

$$v(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau=5t-\frac{1}{2}t^2 \text{ [m/s]}$$

位置 $x(t)$ は

$$x(t)=\int_0^t v(\tau)d\tau=\frac{5}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3 \text{ [m]}$$

ここに $t=5$ を代入して，$x=41.7$ [m]

正　解　41.7 [m]

第３節　運動量と力積

速度 $\vec{v}$ で運動している質量 m の質点について，ベクトル $m\vec{v}$ を運動量という。この質点に力 $\vec{F}(t)$ が時刻 t_1 から t_2 まで作用すると，運動量の増分 $\Delta(m\vec{v})$ は

$$\Delta(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\tau)d\tau$$

である。右辺を力積とよぶ。

この式を時間 t で微分すると，

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

となり，運動方程式と等価であることがわかる。

［例題　４］　20[m/s]で運動している質量 500[kg]の物体を 10 秒で完全に静止させたい。このとき平均何[N]の力を作用させればよいか。

［解答　４］

この物体の運動量は

$$500 \times 20 = 10000 \text{ [kg・m/s]}$$

力の平均値を F [N]とすると，10 秒間に物体に与える力積は $10F$ [kg・m/s]

この 2 つの値が等しいので，

$$10000 = 10F$$

$$\therefore F = 1000 \text{ [N]}$$

したがって，平均 1000[N]の力を作用させればよい。

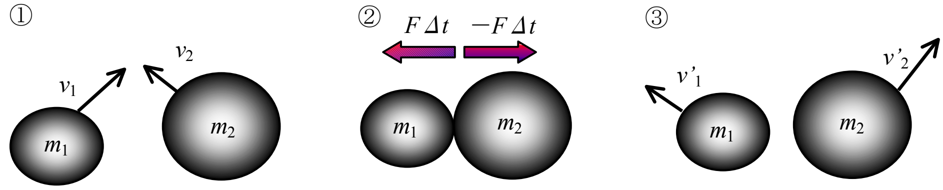
正　解　1000[N]

第４節　質点の衝突

質点どうしが衝突する場合を考える。図のように，それぞれ運動量 $m_1\vec{v}_1$， $m_2\vec{v}_2$ を持つ質点が衝突したとする。質点どうしが接触している間（時間 Δt ）に，質点 1 から質点 2 に力積 $\vec{F}\Delta t$ が与えられ，また作用反作用の法則より，質点２から質点１に力積 $-\vec{F}\Delta t$ が与えられる。したがって，衝突前後の運動量の総和は

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

となって保存されていることがわかる。これを運動量保存則という。

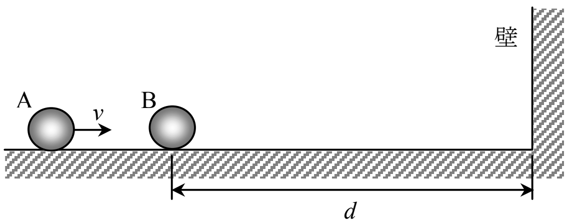


また衝突前後のはね返り方向の相対速度の比から「はねかえり定数」e を下のように定義する。

$$e(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -(\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1)$$

e は 0 から 1 の値をとる。特に $e = 1$ の場合を完全弾性衝突，$e = 0$ の場合を完全塑性衝突という。$e = 0$ の場合は, 衝突後の相対速度が 0, すなわち衝突後 2 物体が一体となって運動することを意味している。

［例題　５］　壁から d だけ離れた位置に，小球 B (質量 m) が置かれている。ここに壁の反対側から小球 A (質量 m) を，初速 v で衝突させたところ，小球 B が壁で跳ね返って，小球 A と，壁から $0.5d$ はなれた位置で衝突した。A と B との間のはね返り係数を求めよ。ただし，B と壁は弾性衝突するものとし，床はなめらかで水平であるものとする。



［解答　５］

衝突した位置が壁と B との中点なので，A が $0.5d$ 動く間に，B が $1.5d$ 動いたことになる。つまり，速さの比は，1 : 3 である。そこで，衝突後の A の速さを u とおくと，B の速さは，$3u$ である。これを用いて運動量保存則をたてると，

$$mv = mu + 3mu \qquad \therefore \quad u = \frac{v}{4}$$

これより，はね返り係数は,

$$e = \frac{\frac{3}{4}v - \frac{1}{4}v}{v} = \frac{1}{2}$$

正　解　$e = \dfrac{1}{2}$

第５節　力学的エネルギー

機械力学の分野で重要なエネルギーの概念には

１　運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (m：物体の質量，v：物体の速度)$$

２　重力による位置エネルギー

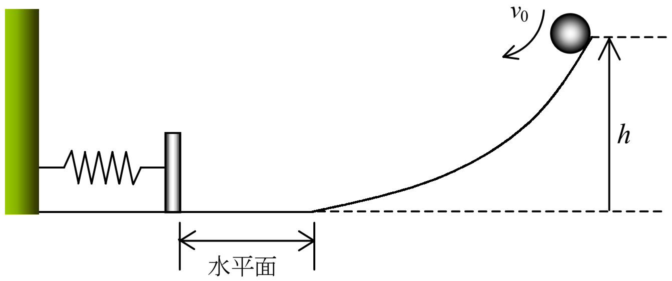
$$U = mgh \qquad (g：重力加速度，h：基準面からの高さ)$$

３　弾性力による位置エネルギー（弾性エネルギー）

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (k：ばね定数，x：変位)$$

があり，これらをまとめて力学的エネルギーとよぶ。外界からのエネルギー（仕事）の授受がない場合，力学的エネルギーは保存される。逆にエネルギーの授受がある場合は，その和が，力学的エネルギーの変化量に等しい。

［例題　６］　滑らかな曲面と水平面上を動く質量 m の質点がある。いま，質点を水平面からの高さ h の位置から速さ v_0 を与えてはなす場合，水平面上での質点の速さはいくらか。また，質点の進路上にばね定数 k のばねを置いたとき，質点の速さが 0 になったときのばねの縮みはいくらか。



［解答　６］

水平面を基準の高さにとると，はじめに物体がもつ力学的エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

水平面上では位置エネルギーがゼロとなり，すべてが運動エネルギーに変換される。このときの速度 v'を用いて力学的エネルギーを表すと，

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$ となることより，

$$v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

次にばねに衝突して速度を失う場合，運動エネルギーは弾性エネルギーに変換される。このときの弾性エネルギーをばねの変位 x を用いて表すと，

$$E' = \frac{1}{2}kx^2$$

となる。エネルギー保存則より，$E' = E$ が成立し，

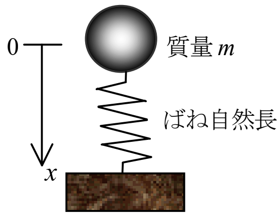
$$x = \sqrt{\frac{mv_0{}^2 + 2mgh}{k}}$$

正　解

速さ　$\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

縮み　$\sqrt{\frac{mv_0{}^2 + 2mgh}{k}}$

［例題　7］　ばね定数 k のばねにつなげた質量 m の質点を，下図のようにばねが自然長である状態から静かに手をはなした。このとき質点は上下に振動するが，このときの振幅と最大速度を求めよ。



［解答　7］

初期状態では，ばねの弾性エネルギー，質点の運動エネルギーともに 0 である。また，この位置を位置エネルギーの基準点にとれば，位置エネルギーも 0 となる。したがって，初期状態での力学的エネルギーの総和は 0 である。

一方，質点が x だけ下がった状態を考える。位置エネルギーは $-mgx$，ばねの弾性エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ となる。また，このときの質点の速度を v とすれば，運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ となる。

ここで力学的エネルギー保存則より

$$-mgx+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=0$$

上式を $v=0$ として解くと，

$$\frac{1}{2}kx^2-mgx=x(\frac{1}{2}kx-mg)=0$$

$$x_1=0\,,\quad x_2=\frac{2mg}{k}$$

この x_1，x_2 の差の半分が振幅なので，振幅は $\frac{mg}{k}$ となる。

一方，上式を変形して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2&=-\frac{1}{2}kx^2+mgx\\&=-\frac{1}{2}k(x-\frac{mg}{k})^2+\frac{(mg)^2}{2k}\end{aligned}$$

$x=\frac{mg}{k}$ のとき $\frac{1}{2}mv^2$ は最大値 $\frac{(mg)^2}{2k}$ をとる。

したがって，このときの v は，

$$v_{\mathrm{max}}=g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

正　解	振幅	$\frac{mg}{k}$
	最大速度	$g\sqrt{\frac{m}{k}}$

第２章　剛体の力学

第１節　剛体の運動（モーメントのつりあい）

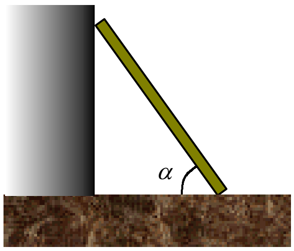
剛体に対し，任意の点まわりのモーメント $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \ldots, \vec{N}_n$ が外部から作用するとき，剛体が回転しないための条件は，合モーメントが $\vec{0}$ となる。すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i = \vec{0}$$

となることである。ある点まわりのモーメント $\vec{N}_i$ は，ある点と力の作用点を結ぶベクトル $\vec{r}_i$ と力 $\vec{F}_i$ の外積で表される。

$$\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

［例題　８］　滑らかな鉛直壁と粗い水平床との間に，はしごが立てかけられており，床と角度αをなして静止している。はしごの重心は中央にあるとして，このときのはしごが水平床から受ける静止摩擦力を求めよ。また，床とはしごの静止摩擦係数はいくら以上であるか。なお，はしごの重量は W である。



［解答　８］

はしごに作用する力を全て記述すると

壁から受ける垂直抗力：N_1

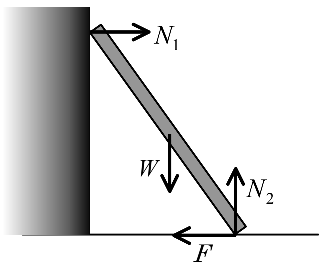
床から受ける垂直抗力：N_2

床から受ける摩擦力　：F

また，はしごの全重量が重心位置に集中しているとみなして，

重心に作用する重力　：W

水平，垂直方向の力のつりあいを考えて，



$N_1 - F = 0$

$N_2 - W = 0$

はしごの下端におけるモーメントのつりあいを考えて（はしごの長さを $2l$ とする）

$2lN_1 \sin\alpha = lW\cos\alpha$

よって

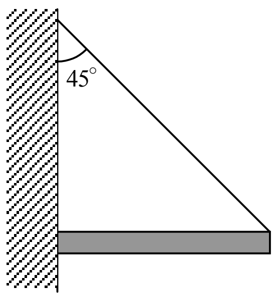
$$F = \frac{W}{2\tan\alpha}$$

一方，床面とはしごの間の静止摩擦係数をμとすると，

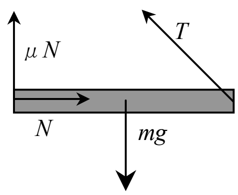
$F \leq \mu N_2$　　よって　$\mu \geq \dfrac{1}{2\tan\alpha}$

正　解	静止摩擦力	$\dfrac{W}{2\tan\alpha}$
	静止摩擦係数	$\dfrac{1}{2\tan\alpha}$

［例題　9］　図のように，鉛直な粗い壁に，一様でまっすぐな棒を水平に支えたい。そのために必要な，壁と棒との間の静止摩擦係数はいくらか。ただし，糸は十分に軽く，棒の壁に接している方と逆の端点を 45° の角度で支えているものとする。



［解答　9］



棒に働く力を求めると，右の図のようになる。

力のつりあい式より，

$$\begin{cases} \mu N + \dfrac{T}{\sqrt{2}} = mg \\ N = \dfrac{T}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

左端周りのモーメントのつりあい式より，棒の長さを l とおくと，

$$mg \times \frac{l}{2} = T \times \frac{l}{\sqrt{2}}$$

以上の 3 つの式を解いて，$\mu = 1$ が正解となる。

正　解　$\mu = 1$

第２節　剛体の運動（回転運動）

剛体の任意の点まわりに外部から作用するモーメントの総和が $\vec{N}$ であるとき，剛体には角加速度 $\vec{\beta}$ が生じる。このとき $\vec{N}$ と $\vec{\beta}$ の関係は，剛体の慣性モーメント（回転運動の運動状態の安定さを示す。詳細後述）I を用いて以下のように表すことができる。

$$\vec{N} = I\vec{\beta}$$

角速度 $\vec{\omega}$ で慣性モーメント I の剛体が回転している場合，角運動量 $\vec{L}$ は,

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

で表される。

［例題１０］　固定軸まわりに自由に回転できる半径 r，慣性モーメント I の車輪がある。この車輪に長さ l の細くて伸びない軽い糸を全て巻きつけて静止させ，糸の一端を車輪の接線方向に一定の力 F で引張るとき，

1　車輪の角加速度 β を求めよ

2　糸の他端が車輪を離れるまでの時間を求めよ。

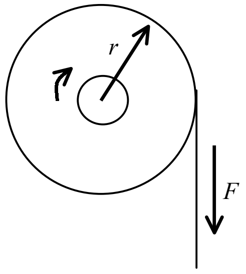
3　糸の他端が車輪を離れたあとの車輪の角運動量を求めよ。

［解答１０］

1　糸を引くことにより，右回りのモーメントが発生する。糸が離れる位置に，力 F が集中していると考えると，回転軸まわりに作用するモーメントは $N = rF$ である。これにより剛体の回転運動の方程式は,

$$I\beta = rF$$

となり,



$$\beta = \frac{rF}{I}$$

と求められる。

２　車輪が回転した角度をθとすると，

$$l = r\theta$$

が成り立つ。一方，車輪は等角加速度運動を行っており，回転時間を t とすると，

$$\theta = \frac{1}{2}\beta t^2$$

が成り立つ。以上よりθ, βを消去して

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2Il}{F}}$$

３　車輪は静止した状態から等角加速度運動を行っているから，糸が離れたときの車輪の角速度は

$$\omega = \beta t = \sqrt{\frac{2lF}{I}}$$

よって角運動量Lは,

$$L = \sqrt{2lFI}$$

正　解　１　$\dfrac{rF}{I}$

２　$\dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{2Il}{F}}$

３　$\sqrt{2lFI}$

［例題１１］　質量 m，半径 r，中心回りの慣性モーメント$\frac{1}{2}mr^2$の円板が角速度ωで回転しているところに，円板のふちに接線方向に一定の大きさの力 F を加えたところ，t 秒後に静止した。

１　F の大きさを求めよ。

２　静止するまでに何回転したか。

［解答１１］

１　回転についての運動方程式をたてる。角加速度をβとおくと，

$$\frac{1}{2}mr^2\beta = -Fr$$

よって，角加速度は，$\beta = -\dfrac{2F}{mr}$ となる。

これより，等加速度運動の公式を用いて，

$$0 = \omega + \beta t = \omega - \frac{2Ft}{mr}$$

よって，

$$F = \frac{mr\omega}{2t}$$

２　等加速度運動の公式より，回転角を θ として，

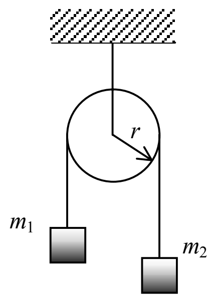
$$0^2 - \omega^2 = 2\beta\theta$$

が成り立つ。ここで，求める回転数を n とすると，$n = \dfrac{\theta}{2\pi}$ なので，

$$n = -\frac{\omega^2}{4\pi\beta} = \frac{\omega t}{4\pi}$$

正　解　１　$\dfrac{mr\omega}{2t}$　　２　$\dfrac{\omega t}{4\pi}$

［例題１２］　質量 M，半径 r の定滑車の両側に，質量 m_1，m_2（$m_1 > m_2$）の物体を取り付けたときの物体の加速度を求めよ。ただし，重力加速度を g，滑車の慣性モーメントを $\dfrac{1}{2}Mr^2$ とし，ひもはすべらないものとする(Atwood の滑車)。



［解答１２］

M が無視できる場合には，ひもの張力は等しいが，この場合は異なる（さもないと，滑車が回らない)。これだけ注意する。

加速度を，物体について a，滑車は $\dfrac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$ とすると

並進について，

$m_1 a = m_1 g - T_1$

$m_2 a = T_2 - m_2 g$

回転について，

$$\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\dot{\omega} = T_1 r - T_2 r$$

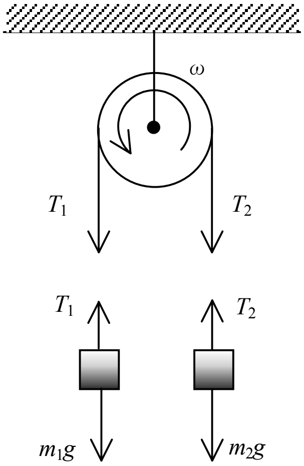
すべらない条件より，

$$a = r\dot{\omega}$$

したがって，

$$\frac{1}{2}Ma = m_1 g - m_1 a - m_2 a - m_2 g$$

$$\therefore \quad a = \frac{2(m_1 - m_2)}{M + 2(m_1 + m_2)} g$$



正　解　$\dfrac{2(m_1 - m_2)}{M + 2(m_1 + m_2)} g$

第３節　慣性モーメント

回転軸から距離 r の位置にある微小要素の質量を dm とすると，慣性モーメントは

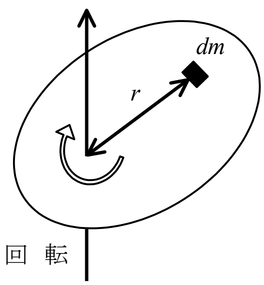
$$I = \int r^2 dm$$

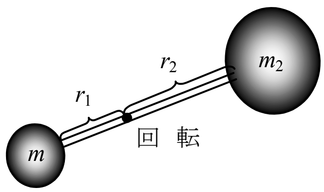
と定義される。

質点が結合した系では，

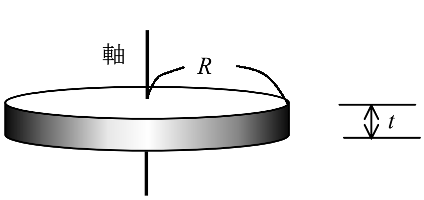
$$I = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2$$

である





［例題１３］　下図の円板の軸まわりの慣性モーメントを M と R を用いて表せ。



密度ρ

質量$M = \rho\pi R^2 t$

［解答１３］

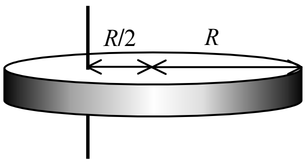
$$I=\int_0^R r^2 2\pi r t\rho dr$$
$$=\int_0^R r^3 2\pi t\rho dr$$
$$=\frac{1}{2}R^4\pi t\rho$$
$$=\frac{1}{2}MR^2$$

正　解　$\frac{1}{2}MR^2$

※ある物体の，重心を通る軸回りの慣性モーメントが I_G であったとする。このとき，重心から距離 R 離れた軸まわりの慣性モーメント I は以下のように表される。

$I=I_G+MR^2$ （ただし，M はこの物体の質量である）

［例題１４］　下図の円板の慣性モーメントを求めよ。



［解答１４］

円板の重心まわりの慣性モーメントは，［例題１３］と同様にして

$$I_G=\frac{1}{2}MR^2$$

重心から $\frac{1}{2}R$ 離れた回転軸まわりの慣性モーメントは

$$I=I_G+M(\frac{1}{2}R)^2$$
$$=\frac{3}{4}MR^2$$

正　解　$\frac{3}{4}MR^2$